VEKTÖRLER

Bu derste;

- Kartezyen Koordinat Sistemi,
- Kutupsal Koordinat Sistemi,
- Skaler ve Vektörel Nicelikler,
- Yerdeğiştirme ve Vektör,
- Vektörlerin Cebir Kuralları,
- Bir Vektörün Dik Bileşenlere Ayrılması,
- Analitik Yönteme Göre Vektörleri Toplama

ile ilgili konular anlatılacaktır.

Dersin Hedefi

Bu dersi tamamladığınızda,

✓Koordinat sistemlerini,

✓Vektörleri ve vektörlerin cebir kurallarını öğrenmiş olacaksınız.

2.1 Koordinat Sistemleri

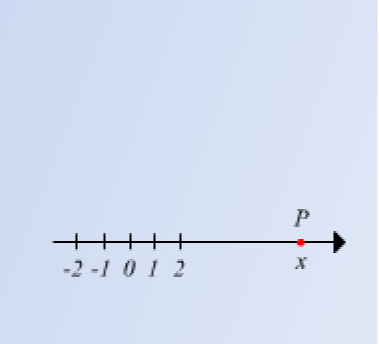
Koordinat Sistemleri uzayda bir noktanın yerini tanımlamak için kullanılan araçlardır. Bu derste,

- Kartezyen Koordinat Sistemi
- Kutupsal Koordinat Sistemi

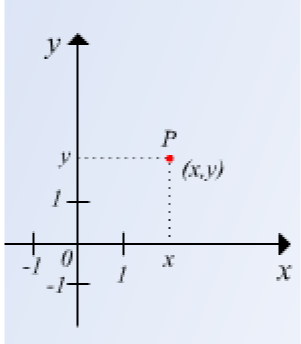
olmak üzere iki koordinat sisteminden bahsedeceğiz.

2.1.1 Kartezyen Koordinat Sistemi

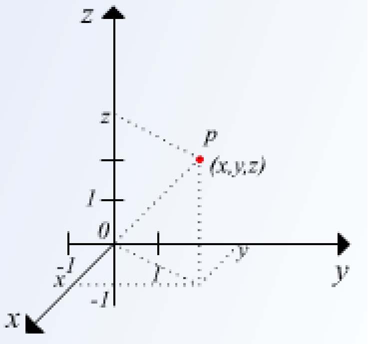
Derslerimizde sıklıkla kullanacağımız uygun bir koordinat sistemi **KARTEZYEN (DİK) KOORDİNAT SİSTEMİ**'dir. Bir doğru üzerinde bir noktanın yeri, bir düzlemde bir noktanın yeri ve bir uzay içinde bir noktanın yeri sırasıyla **BİR BOYUTLU**, **İKİ BOYUTLU** ve **ÜÇ BOYUTLU KARTEZYEN KOORDİNAT SİSTEMİ** ile tanımlanır.



Bir Boyutlu KKS



İki Boyutlu KKS

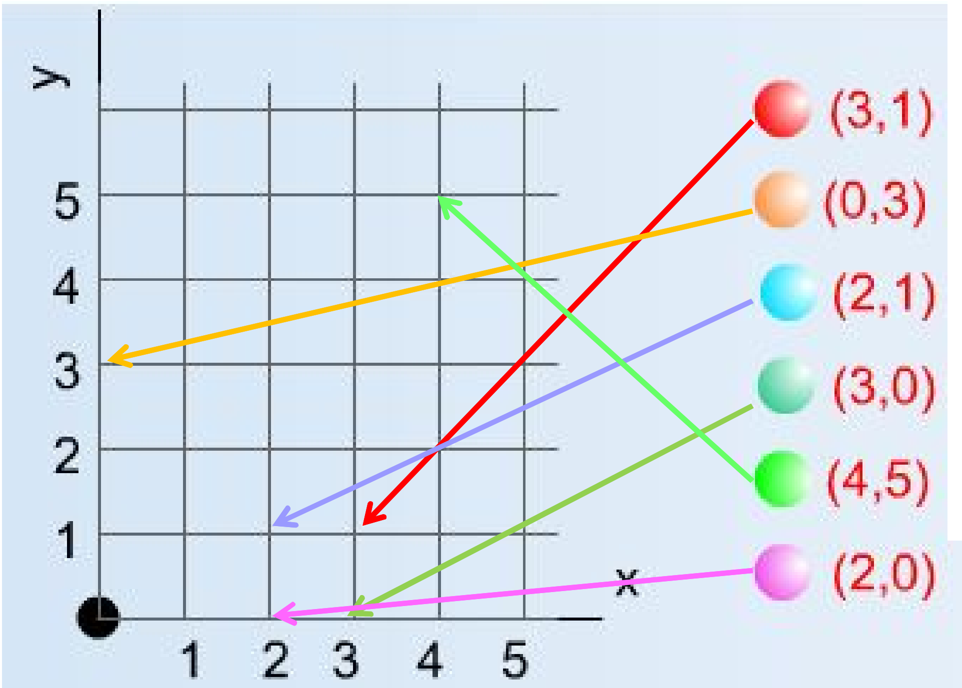


Üç Boyutlu KKS

Kartezyen Koordinat Sistemleri (KKS)

Böyle bir koordinat sistemi, orijin adı verilen ve O ile gösterilen bir başlangıç noktası ile birlikte ölçekli ve x, y, z ile adlandırılmış birbirlerine dik doğrultuları içerir. Bu doğrultular veya eksenler üzerinde O orijinin sağına doğru artan pozitif sayılar ve soluna doğru azalan negatif sayılar bulunur. Ayrıca, metre gibi bir uzunluk birimi eklenir.

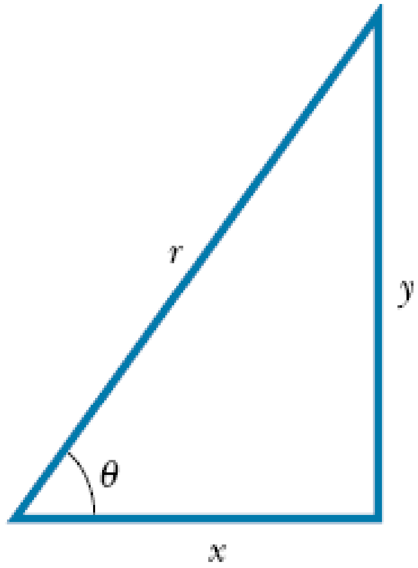
Herhangi bir *P* noktasının yeri bir boyutlu halde bir koordinat (x) ile, iki boyutlu halde iki koordinat (x,y) ile ve üç boyutlu halde üç koordinat (x,y,z) ile tanımlanır.



$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

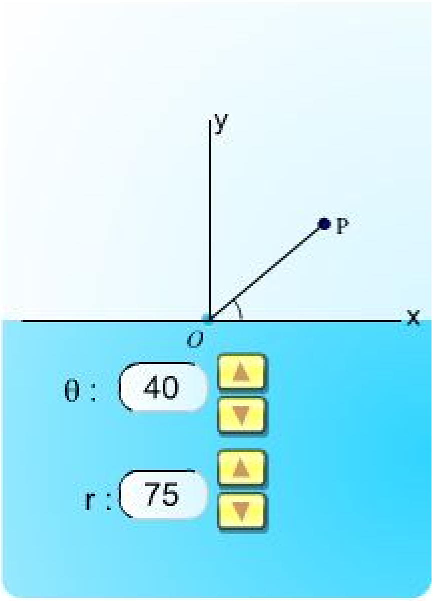
$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

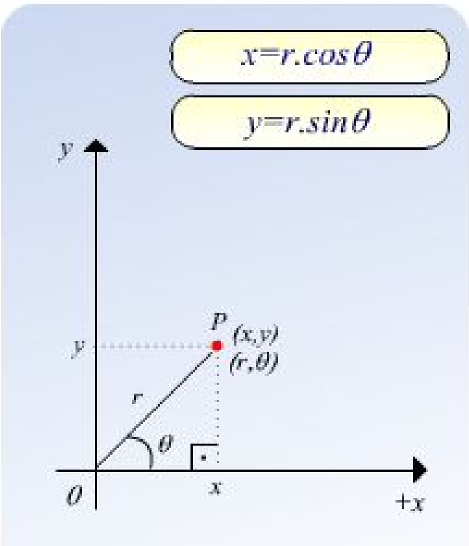


Hatırlatma

2.1.2 Kutupsal Koordinat Sistemi



Düzlemde bir noktanın yeri (r,q) ile gösterilen **KUTUPSAL KOORDİNATLARLA** da tanımlanabilir. Bu sistemde, bir x referans doğrultusu ve üzerinde bir O orijini alınır. q, +x doğrultusu ile yelkovanın dönme yönünün tersi yönünde pozitif olarak ölçülen açıdır. r ise, q doğrultusunda orijine olan uzaklıktır. Yandaki şekilde, +x doğrultusu ile q açısı yapan doğrultu üzerine O orijininden r kadar uzaklıktaki bir *P* noktası gösterilir.



2.1.2.1 Kartezyen Koordinat Sistemi ile Kutupsal Koordinat Sistemi Arasındaki İlişki

İki boyutlu kartezyen koordinat sistemi ile kutupsal koordinat sistemi arasındaki ilişkiyi anlamak üzere, düzlemdeki bir *P* noktası için (x,y) kartezyen koordinat çiftini ve (r,q) kutupsal koordinat çiftini göz önüne alalım.

Şekildeki dik üçgende q açısının trigonometrik fonksiyonları tanımlarından,

$$x = r.\cos\theta \qquad \mathbf{(2.1)}$$

$$y = r.\sin\theta \qquad \mathbf{(2.2)}$$

bağıntıları elde edilir.

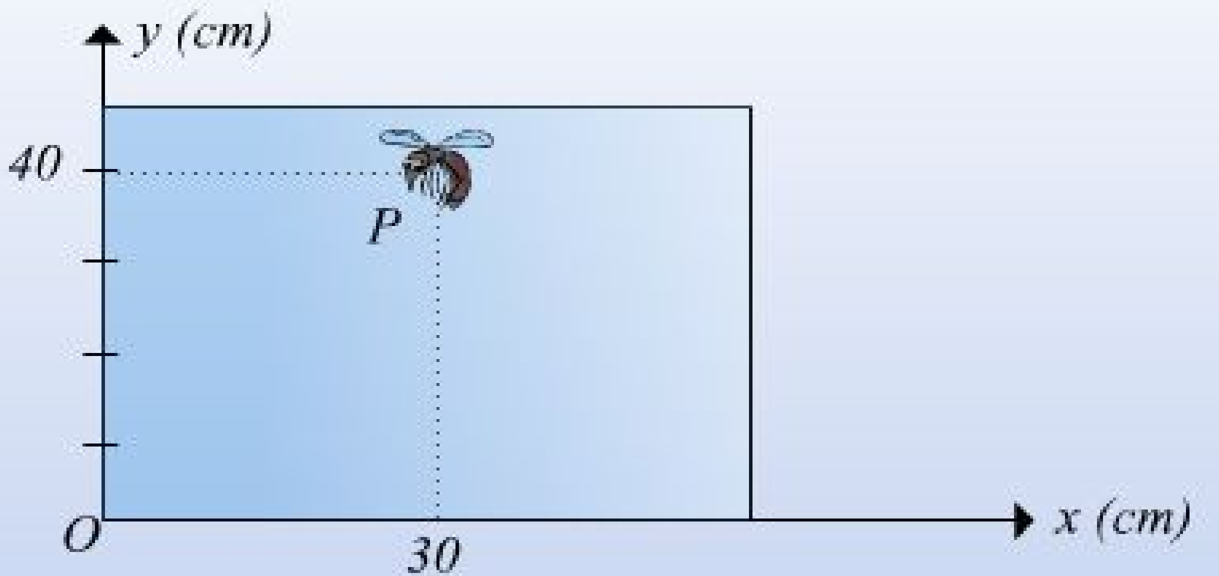
Ters dönüşüm bağıntıları kolayca türetilebilir:

Bu bağıntılar, (r,q) kutupsal koordinatlarına sahip bir *P* noktasının (x,y) kartezyen koordinatlarını bulmamızı sağlar.
Ters dönüşüm bağıntıları kolayca türetilebilir:

$$\mathrm{Tan}\theta = \frac{y}{x} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

Örnek

▶ Şekilde gösterilen dikdörtgen şeklindeki bir masanın üzerinde bulunan sineğin yerinin kartezyen koordinatları cm cinsinden (30,40) olarak veriliyor. P noktasındaki sineğin masanın köşesinden olan r uzaklığını ve x ile gösterilen kenar ile OP doğru parçasının yaptığı θ açısını bulunuz.



▶ Bir önceki örnekteki sinek, (60 cm, 30°) kutupsal koordinatları ile verilen bir R noktasında bulunursa, sineğin konumunun kartezyen koordinatlarını bulunuz.

2.2 Fiziksel Nicelikler

Fizik derslerimizde karşılaşacağımız fiziksel nicelikleri iki gruba ayırabiliriz.

- SKALER NİCELİKLER
- VEKTÖREL NİCELİKLER

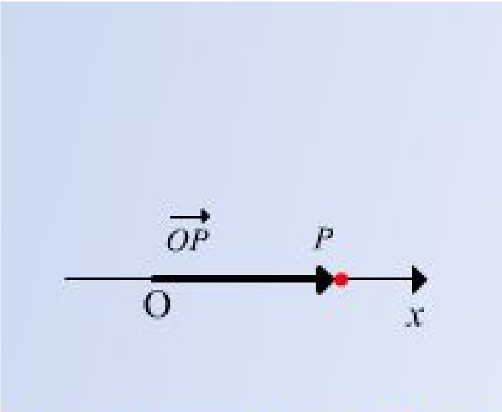
2.2.1 Skaler ve Vektörel Nicelikler

SKALER NİCELİK, bir sayı ve bir birim ile tam olarak tanımlanabilen niceliktir. Bir ekmeğin kütlesi 450 gram, odanın sıcaklığı , bir motorun gücü 7500 Watt gibi tanımlamalar fizik bakımından eksiksiz tanımlamalardır. Onun için, kütle, sıcaklık, uzunluk, güç, iş, enerji gibi nicelikler skaler niceliklerdir. Skaler niceliklerin cebirsel işlemleri reel sayılara ait cebir kurallarına göre yapılır.

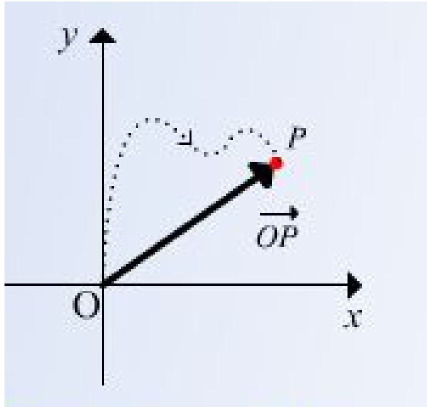
VEKTÖREL NİCELİK, bir sayı ve bir birim ile birlikte bir yönlü doğrultu ile tam olarak tanımlanabilen niceliktir. Rüzgârın hızı, kuzeyden güneye doğru 40 şeklinde bir tanımlama eksiksizdir. Onun için, hız bir vektörel niceliktir. Ayrıca, yerdeğiştirme, ivme, kuvvet, momentum, elektrik alan, magnetik alan vektörel niceliklerdendir.

2.3 Yerdeğiştirme ve Vektör

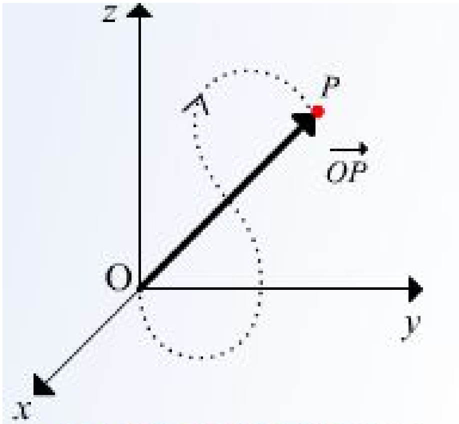
Bir vektörel nicelik olan yerdeğiştirmeyi inceleyelim. Bir cisim, aşağıdaki şekillerde gösterildiği gibi, doğru boyunca, düzlemde veya uzayda bir O başlangıç noktasından harekete başlayıp herhangi bir yol izleyerek *P* noktasına gelirse, cismin O'ya göre yer değiştirdiğini söyleriz ve buna **YERDEĞİŞTİRME** deriz.



Doğru boyunca yerdeğiştirme



Düzlemde yerdeğiştirme

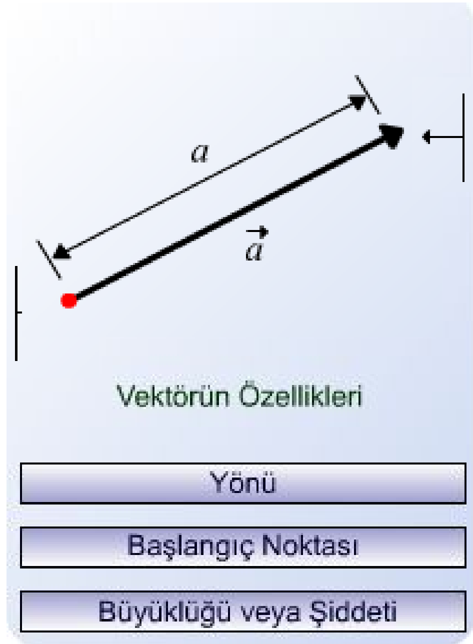


Uzayda yerdeğiştirme

Bu yerdeğiştirme niceliği, O noktası ile P noktası arasındaki mesafeyi (örneğin 2 cm gibi) ve aynı zamanda O'dan P'ye doğru olan yönü de içerir. Bundan dolayı, yerdeğiştirme vektörel bir niceliktir, O'dan P'ye çizilen bir ok işareti ile gösterilir ve $\overrightarrow{OP}$ şeklinde yazılabilir.

2.3.1 Bir Vektörün Özellikleri

Genel olarak, matematikte herhangi bir vektör $\vec{a}$ veya $\vec{A}$ gibi küçük veya büyük harf üzerinde bir ok ile veya koyu basılmış ***a*** veya ***A*** harfi ile gösterilir. Bir $\vec{a}$ vektörünün sayı ve birimle ifade edilen kısmına vektörün BÜYÜKLÜĞÜ veya ŞİDDETİ adı verilir. $\vec{a}$ vektörünün büyüklüğü $|\vec{a}|$ sembolü veya sadece a ile gösterilir.



2.4 Vektörlerin Cebir Kuralları

Vektörlerin Cebir Kuralları'nda,

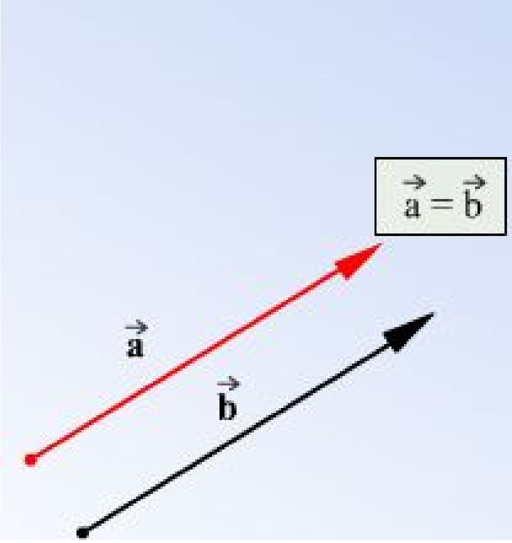
- İki Vektörün Eşitliği,
- İki Vektörün Toplamı,
- Bir Vektörün Negatifi,
- Vektörlerin Çıkarılması,
- Bir Vektörü Skalerle Çarpma,
- Bir Vektörün Birim Vektörü

konuları incelenecektir.

Bir $\vec{a}$ vektörü bir ok işareti ile temsil edilir. $\vec{a}$ vektörünün büyüklüğü ok işaretinin boyu ile orantılıdır. $\vec{a}$ vektörünün yönlü doğrultusunu ok başı işaret eder.

2.4.1 İki Vektörün Eşitliği

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin büyüklükleri eşit $(a = b)$ ve yönleri aynı ise, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri **EŞİT**'tir denir ve $\vec{a} = \vec{b}$ şeklinde yazılır.



2.4.2 İki Vektörün Toplamı

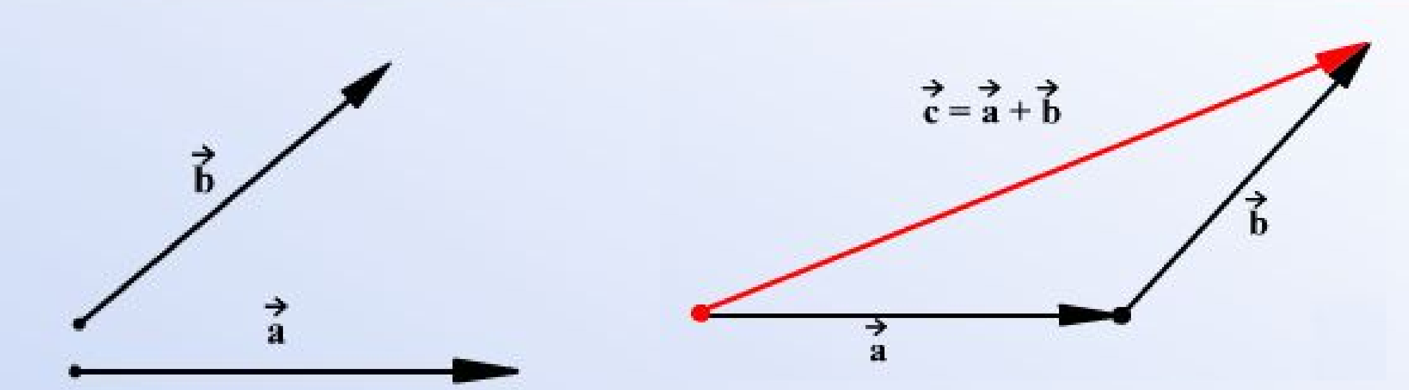
$\vec{a}$ vektörü ile $\vec{b}$ vektörünü toplama işlemi $\vec{a} + \vec{b}$ şeklinde yazılır ve sonuç olan vektör bir $\vec{c}$ vektörüdür, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

$\vec{c}$ vektörüne **TOPLAM** veya **BİLEŞKE VEKTÖR** adı verilir. Fizikte, örneğin, hız vektörü ile hız vektörü toplanır.

İki vektör geometrik olarak **üçgen** ve **paralelkenar** yöntemlerine göre toplanabilir.

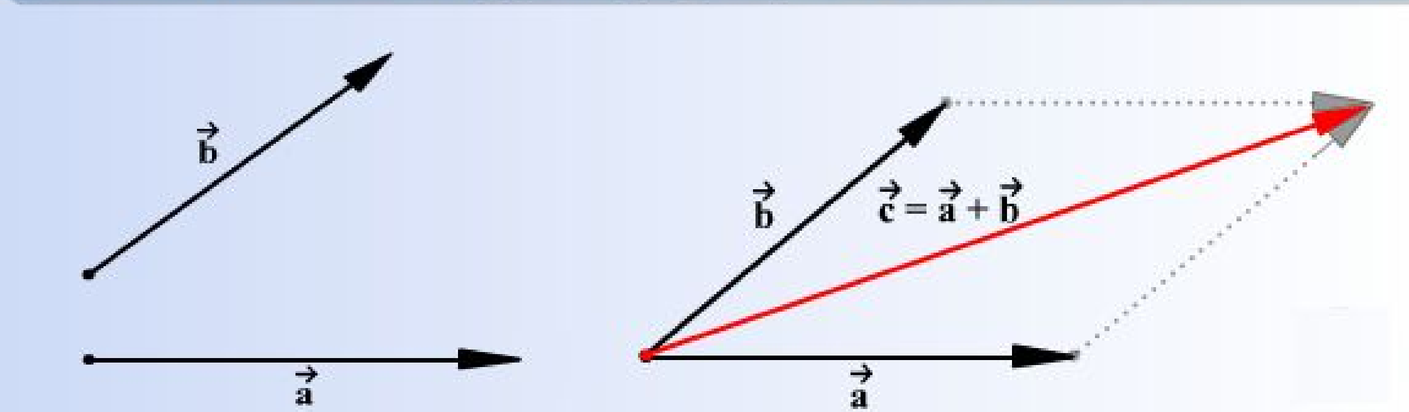
ÜÇGEN YÖNTEMİ

Verilen $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri toplamak için $\vec{a}$ vektörü alınır, ucuna $\vec{b}$ vektörü yerleştirilir, açık olan $\vec{a}$'nın başlangıcı ile $\vec{b}$'nin ucu birleştirilir ve böylece $\vec{c}$ vektörü bulunur

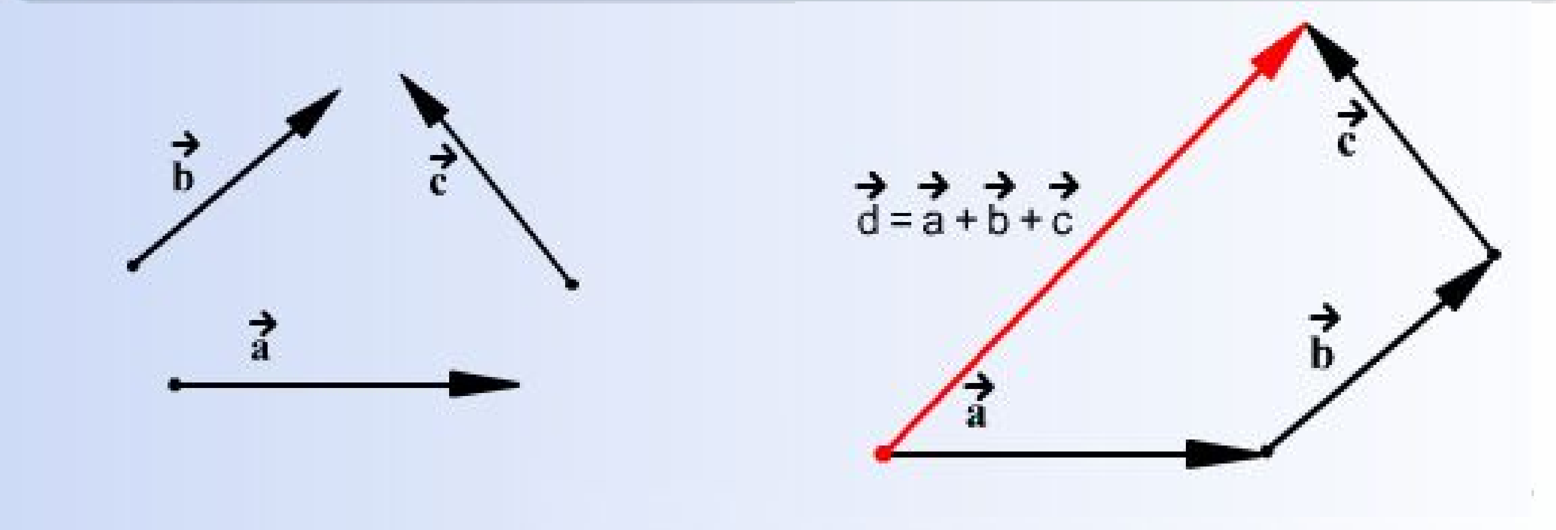


PARALELKENAR YÖNTEMİ

Verilen $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinden $\vec{a}$ alınır, $\vec{b}$ $\vec{a}$'nın başlangıcı ile çakışacak şekilde yerleştirilir, şekil paralelkenara tamamlanarak köşegen ile çakışan toplam $\vec{c}$ vektörü elde edilir.



İkiden fazla vektörü toplamak için üçgen yöntemi peşpeşe uygulanır veya çokgen oluşturularak bileşke vektör bulunur. Verilen $\vec{a}$, $\vec{b}$ ve $\vec{c}$ vektörlerinin toplamı aşağıdaki gibi gösterilir.



Analitik Yönteme göre vektörleri bileşenlere ayırarak toplama işlemi bu dersin sonunda tartışılacaktır. Vektörleri toplama işlemine ait iki temel özellik:

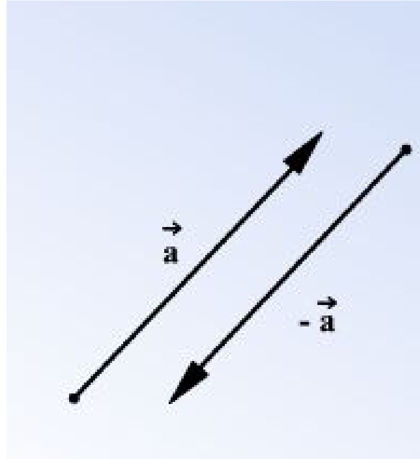
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (2.5)	**Değişme Özelliği**
$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (2.6)	**Birleşme Özelliği**

2.4.3 Bir Vektörün Negatifi

Verilen bir $\vec{a}$ vektörünün negatifi olan vektör, $-\vec{a}$ şeklinde yazılır, büyüklüğü a olan ve yönü $\vec{a}$ 'ya zıt olan bir vektördür.
Diğer bir tanımlama ile

$$\vec{a}+(-\vec{a})=0 \qquad (2.7)$$

dir.



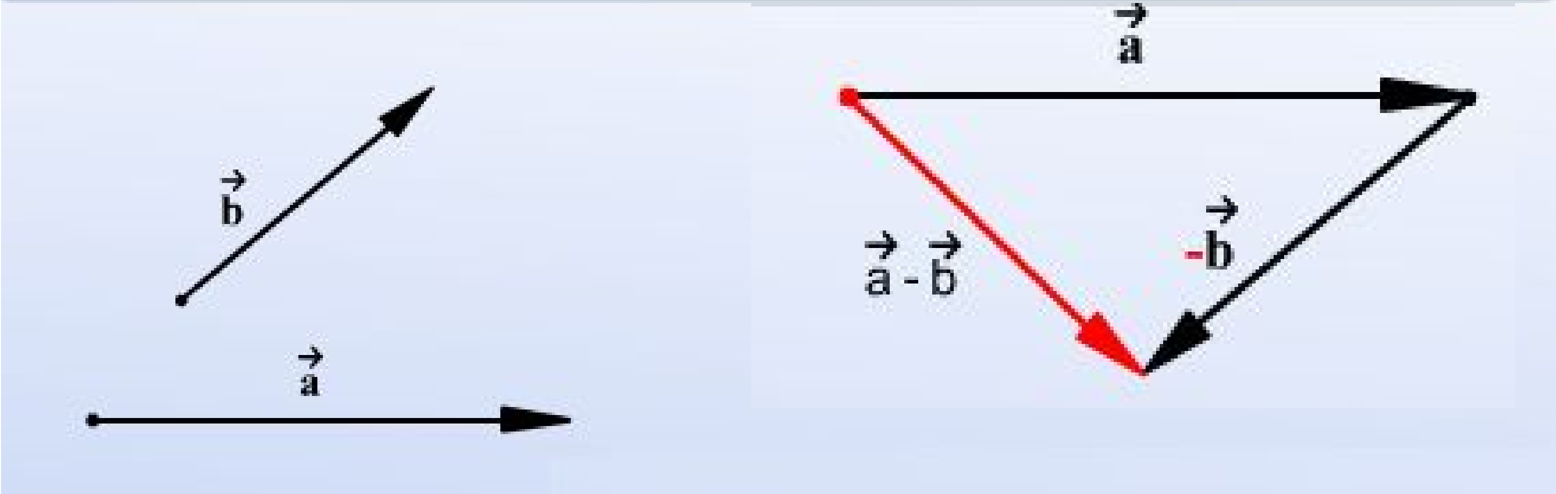
2.4.4 Vektörlerin Çıkarılması

Verilen bir $\vec{a}$ vektöründen verilen bir $\vec{b}$ vektörünü çıkarma işlemi $\vec{a}-\vec{b}$ şeklinde yazılır ve $\vec{a}-\vec{b}$ vektörü $\vec{a}$ ve $(-\vec{b})$'nin toplamı olarak tanımlanır:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}) \qquad (2.8)$$

O halde, $\vec{a}-\vec{b}$ vektörü üçgen yöntemine göre, aşağıdaki animasyonda gösterildiği gibi, bulunabilir.

$\vec{a}-\vec{b}$ vektörü $\vec{a}$ ve $(-\vec{b})$ 'nin toplamı olarak tanımlanır.



2.4.5 Bir Vektörü Skalerle Çarpma

Bir $\vec{a}$ vektörünü bir k skaleri ile çarpma işlemi $k\vec{a}$ şeklinde gösterilir ve yeni bir vektör elde edilir.

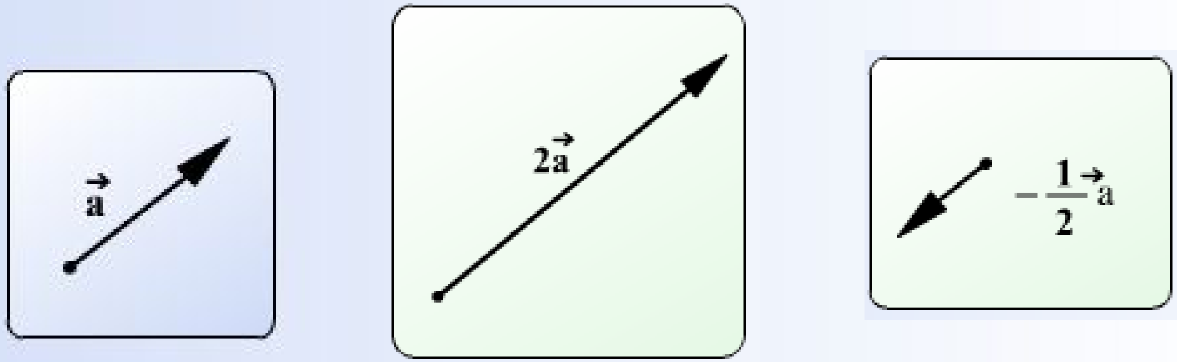
- k pozitif ise, $k\vec{a}$ vektörü $\vec{a}$ vektörü yönünde ve ka büyüklüğüne sahiptir.
- k negatif ise, $k\vec{a}$ vektörü $\vec{a}$ 'nın zıt yönünde ve ka büyüklüğüne sahiptir.

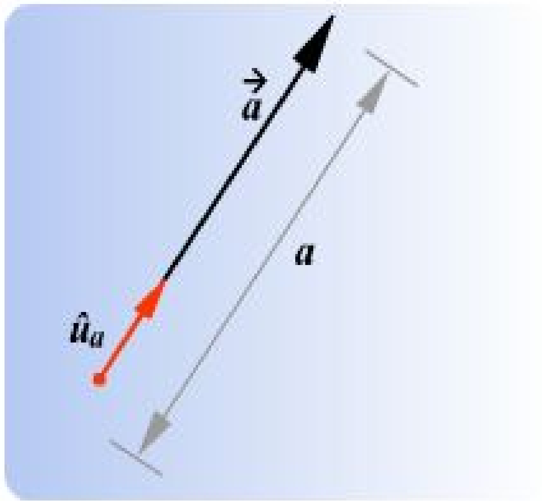
! $\vec{a}$ vektörünün 2 ile çarpılmış halini görmek için **"Buton 1"**e,

! $\vec{a}$ vektörünün $-\frac{1}{2}$ ile çarpılmış halini görmek için **"Buton 2"**ye tıklayınız.

Buton 1

Buton 2





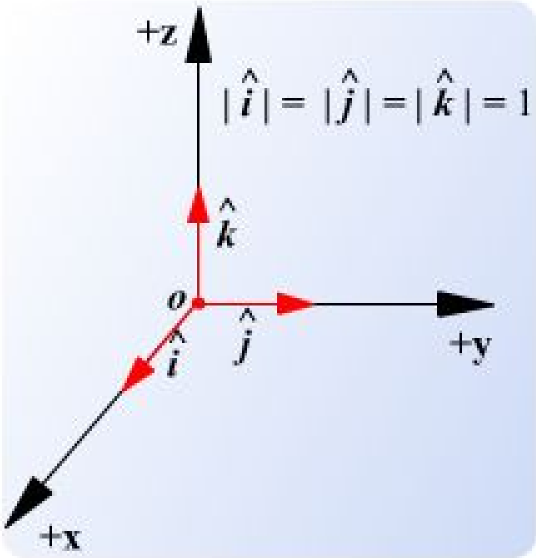
Birim vektör, $\vec{a}$ vektörü yönünde ve büyüklüğü bir birim olan vektördür.

2.4.6 Bir Vektörün Birim Vektörü

Bir $\vec{a}$ vektörünün birim vektörü $\hat{u}_a$, $\vec{a}$ vektörü yönünde ve büyüklüğü bir birim olan bir vektördür:

$$\hat{u}_a = \frac{\vec{a}}{a} \qquad \textbf{(2.9)}$$

$$\left|\hat{u}_a\right| = 1$$



Birim vektör tanımından, $\vec{a}$ vektörü birim vektörü cinsinden

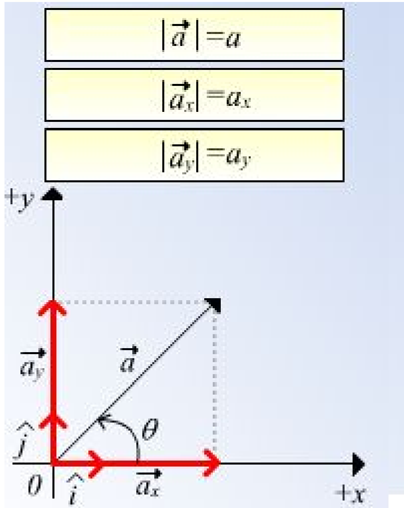
$$\boxed{\vec{a} = a\hat{u}_a}$$

şeklinde yazılır.

Kartezyen koordinat sistemlerinde pozitif yönlü doğrultuların birim vektörleri $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ ile gösterilir.

2.5 Bir Vektörü Dik Bileşenlerine Ayırma

Kartezyen koordinat sistemlerinde pozitif yönlü doğrultuların birim vektörleri $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ ile gösterilir.



Yandaki animasyonda gösterildiği gibi, iki boyutlu kartezyen koordinat sisteminde +x doğrultusu ile θ açısı yapan bir $\vec{a}$ vektörünü göz önüne alalım. $\vec{a}$ vektörünün x ve y doğrultuları üzerindeki izdüşümleri olan, $\vec{a}_x$ ve $\vec{a}_y$ ile gösterilen vektörlere $\vec{a}$ 'nın **DİK VEKTÖR BİLEŞENLERİ** adı verilir ve

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y \qquad \textbf{(2.10)}$$

yazılır.

Diğer taraftan, animasyondaki dik üçgende θ açısının kosinüsü ve sinüsü tanımlarından,

$$a_x = a.\cos\theta \qquad (2.11)$$

$$a_y = a \sin\theta \qquad (2.12)$$

bağıntılarını yazabiliriz. Burada a_x ve a_y skalerlerine $\vec{a}$ vektörünün **SKALER BİLEŞENLERİ** adı verilir.

Ayrıca, yine animasyondaki şekilden veya (2.11) ve (2.12) denklemlerinden

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad (2.13)$$

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x} \text{ veya } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) \qquad (2.14)$$

bağıntıları bulunur.

Sonuç olarak, (2.11) ve (2.12) bağıntıları $\vec{a}$ vektörünün a büyüklüğü ve θ yön bilgisi cinsinden a_x ve a_y skaler bileşenlerini verirken, (2.13) ve (2.14) bağıntıları ise, a_x ve a_y skaler bileşenleri cinsinden $\vec{a}$ vektörünün a büyüklüğünü ve θ yön bilgisini verir.

(2.9) denklemi ile verilen birim vektörün tanımına göre,

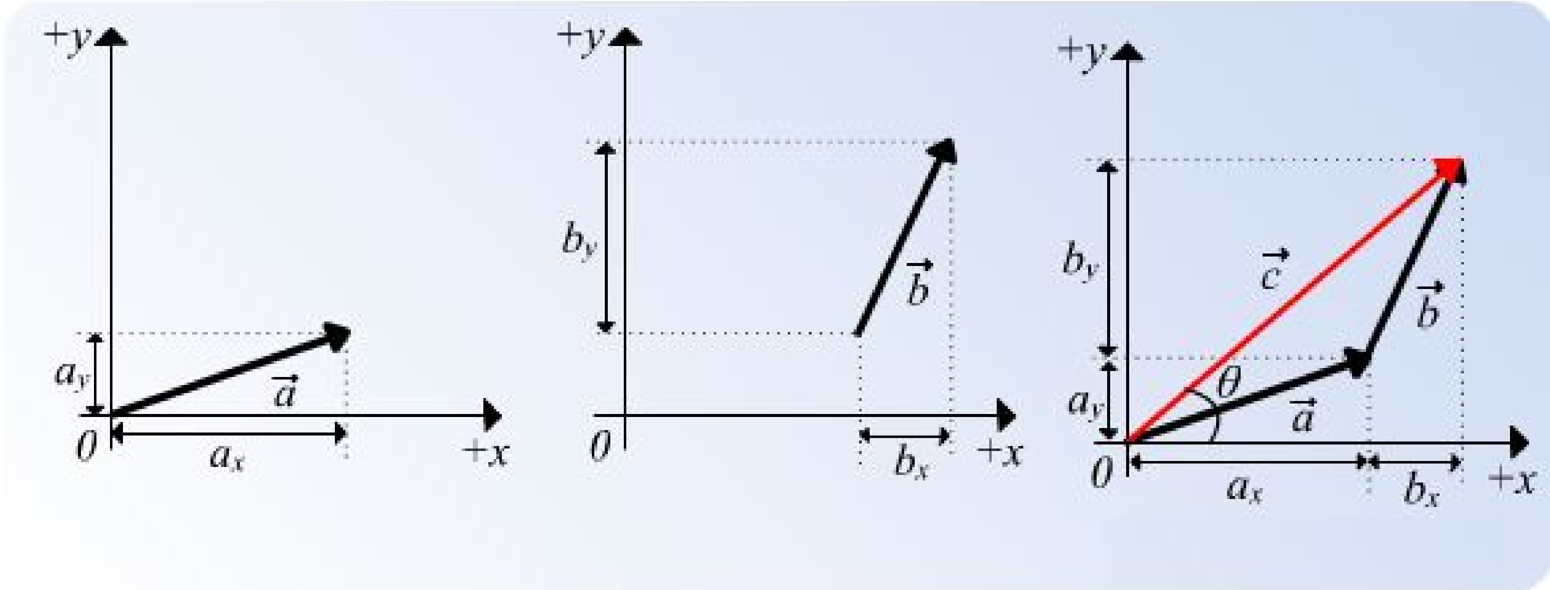
$$\vec{a}_x = a_x\hat{i} \quad \text{ve} \quad \vec{a}_y = a_y\hat{j}$$

yazılır. Bunları (2.10) denkleminde yerlerine koyarak

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \qquad \textbf{(2.15)}$$

elde edilir. Bu, bir $\vec{a}$ vektörünün iki boyutlu kartezyen koordinat sisteminde birim vektörler cinsinden gösterimidir.

2.6 Analitik Yönteme Göre Vektörleri Toplama



İki boyutlu kartezyen koordinat sisteminde verilen

$$\vec{a}_x = a_x\hat{i} + a_y\vec{j} \quad \text{ve} \quad \vec{b}_x = b_x\hat{i} + b_y\vec{j}$$

vektörlerinin toplamı veya bileşke vektörü $\vec{c}$ olsun.

O halde,

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \qquad \text{veya}$$

$$c_x\hat{i} + c_y\hat{j} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j}$$

elde edilir.

Buradan, bileşke vektör $\vec{c}$ 'nin skaler bileşenleri

$$c_x = a_x + b_x$$

$$c_y = a_y + b_y$$

bulunur.

Böylece, $\vec{c}$ bileşke vektörünün büyüklüğü

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = \sqrt{(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2} \qquad \textbf{(2.16)}$$

ve +x ekseni ile yaptığı θ açısının tanjantı

$$\tan\theta = \frac{c_y}{c_x} = \frac{a_y + b_y}{a_x + b_x} \qquad \textbf{(2.17)}$$

olarak bulunur.

Bölüm Özeti

- İki boyutlu kartezyen koordinat sisteminde bir noktanın yeri uzunluk birimi cinsinden (x,y) reel sayı çifti ile tanımlanır.
- Kutupsal koordinat sisteminde *r* uzunluk cinsinden ve θ açı olmak üzere (*r*,*θ*) reel sayı çifti bir noktanın yerini tanımlar.
- Bu iki koordinat sisteminde, verilen bir P noktasına ait (x,y) çifti ve (*r*,*θ*) çifti arasındaki bağıntılar:

$$x = r\cos\theta \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r\sin\theta \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

- Fiziksel nicelikler iki gruba ayrılırlar:

1. Skaler Nicelikler
2. Vektörel Nicelikler

- Skaler niceliklerle cebirsel işlemler reel sayıların cebir kurallarına göre yapılırlar.
- Vektörlerin cebir kuralları çok farklıdır. İki vektör üçgen, paralelkenar ve analitik toplama yöntemlerine göre toplanır.
- Analitik yönteme göre iki vektörü toplamak için önce her bir vektör dik bileşenlerine ayrılır sonra x bileşenleri ve y bileşenleri ayrı ayrı toplanarak bileşkenin x ve y bileşenleri bulunur:

$\vec{a}$ 'nın bileşenleri a_x ve a_y

$\vec{b}$ 'nin bileşenleri b_x ve b_y

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ 'nin bileşenleri: $c_x = a_x + b_x$, $c_y = a_y + b_y$

$\vec{c}$ 'nin büyüklüğü: $c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}$

$\vec{c}$ 'nin doğrultusu: $\tan\theta = \dfrac{c_y}{c_x}$

EXAMPLE 3.1 Polar Coordinates

The cartesian coordinates of a point in the xy plane are $(x, y) = (-3.50, -2.50)$ m, as shown in Figure 3.3. Find the polar coordinates of this point.

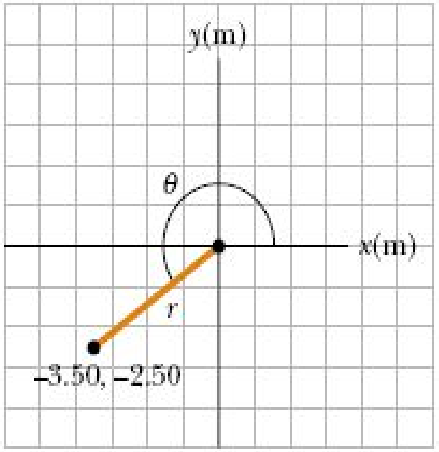


Figure 3.3 Finding polar coordinates when cartesian coordinates are given.

Solution

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3.50 \text{ m})^2 + (-2.50 \text{ m})^2} = \boxed{4.30 \text{ m}}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-2.50 \text{ m}}{-3.50 \text{ m}} = 0.714$$

$$\theta = \boxed{216°}$$

Note that you must use the signs of x and y to find that the point lies in the third quadrant of the coordinate system. That is, $\theta = 216°$ and not $35.5°$.

EXAMPLE 3.2 A Vacation Trip

A car travels 20.0 km due north and then 35.0 km in a direction 60.0° west of north, as shown in Figure 3.12. Find the magnitude and direction of the car's resultant displacement.

Solution In this example, we show two ways to find the resultant of two vectors. We can solve the problem geometrically, using graph paper and a protractor, as shown in Figure 3.12. (In fact, even when you know you are going to be carrying out a calculation, you should sketch the vectors to check your results.) The displacement **R** is the resultant when the two individual displacements **A** and **B** are added.

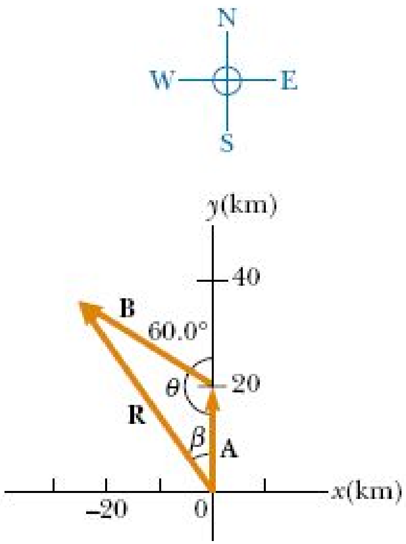


Figure 3.12 Graphical method for finding the resultant displacement vector **R** = **A** + **B**.

To solve the problem algebraically, we note that the magnitude of **R** can be obtained from the law of cosines as applied to the triangle (see Appendix B.4). With $\theta = 180° - 60° = 120°$ and $R^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$, we find that

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

$$= \sqrt{(20.0\text{ km})^2 + (35.0\text{ km})^2 - 2(20.0\text{ km})(35.0\text{ km})\cos 120°}$$

$$= \boxed{48.2\text{ km}}$$

The direction of **R** measured from the northerly direction can be obtained from the law of sines (Appendix B.4):

$$\frac{\sin\beta}{B} = \frac{\sin\theta}{R}$$

$$\sin\beta = \frac{B}{R}\sin\theta = \frac{35.0\text{ km}}{48.2\text{ km}}\sin 120° = 0.629$$

$$\beta = \boxed{38.9°}$$

The resultant displacement of the car is 48.2 km in a direction 38.9° west of north. This result matches what we found graphically.

EXAMPLE 3.3 The Sum of Two Vectors

Find the sum of two vectors **A** and **B** lying in the *xy* plane and given by

$$\mathbf{A} = (2.0\mathbf{i} + 2.0\mathbf{j})\text{ m} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{B} = (2.0\mathbf{i} - 4.0\mathbf{j})\text{ m}$$

Solution Comparing this expression for **A** with the general expression $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j}$, we see that $A_x = 2.0$ m and that $A_y = 2.0$ m. Likewise, $B_x = 2.0$ m and $B_y = -4.0$ m. We obtain the resultant vector **R**, using Equation 3.14:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (2.0 + 2.0)\mathbf{i}\text{ m} + (2.0 - 4.0)\mathbf{j}\text{ m}$$
$$= (4.0\mathbf{i} - 2.0\mathbf{j})\text{ m}$$

or

$$R_x = 4.0\text{ m} \qquad R_y = -2.0\text{ m}$$

The magnitude of **R** is given by Equation 3.16:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(4.0\text{ m})^2 + (-2.0\text{ m})^2} = \sqrt{20}\text{ m}$$
$$= \boxed{4.5\text{ m}}$$

We can find the direction of **R** from Equation 3.17:

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-2.0\text{ m}}{4.0\text{ m}} = -0.50$$

Your calculator likely gives the answer $-27°$ for $\theta = \tan^{-1}(-0.50)$. This answer is correct if we interpret it to mean 27° clockwise from the *x* axis. Our standard form has been to quote the angles measured counterclockwise from the $+x$ axis, and that angle for this vector is $\theta = \boxed{333°}$.

EXAMPLE 3.6 Let's Fly Away!

A commuter airplane takes the route shown in Figure 3.20. First, it flies from the origin of the coordinate system shown to city A, located 175 km in a direction 30.0° north of east. Next, it flies 153 km 20.0° west of north to city B. Finally, it flies 195 km due west to city C. Find the location of city C relative to the origin.

Solution It is convenient to choose the coordinate system shown in Figure 3.20, where the x axis points to the east and the y axis points to the north. Let us denote the three consecutive displacements by the vectors **a**, **b**, and **c**. Displacement **a** has a magnitude of 175 km and the components

$$a_x = a\cos(30.0°) = (175\text{ km})(0.866) = 152\text{ km}$$

$$a_y = a\sin(30.0°) = (175\text{ km})(0.500) = 87.5\text{ km}$$

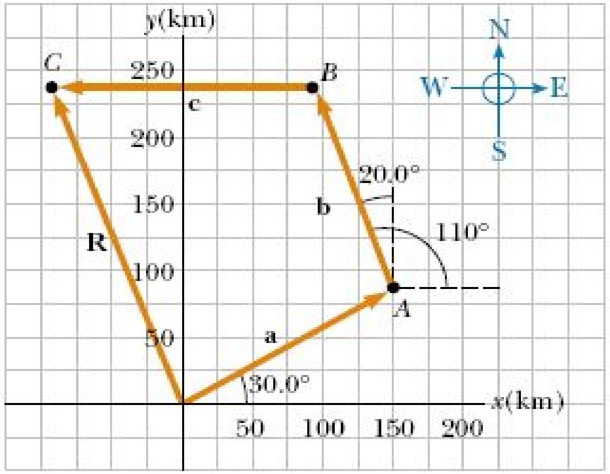


Figure 3.20 The airplane starts at the origin, flies first to city A, then to city B, and finally to city C.

Displacement **b**, whose magnitude is 153 km, has the components

$$b_x = b\cos(110°) = (153\text{ km})(-0.342) = -52.3\text{ km}$$

$$b_y = b\sin(110°) = (153\text{ km})(0.940) = 144\text{ km}$$

Finally, displacement **c**, whose magnitude is 195 km, has the components

$$c_x = c\cos(180°) = (195\text{ km})(-1) = -195\text{ km}$$

$$c_y = c\sin(180°) = 0$$

Therefore, the components of the position vector **R** from the starting point to city C are

$$R_x = a_x + b_x + c_x = 152\text{ km} - 52.3\text{ km} - 195\text{ km}$$
$$= \boxed{-95.3\text{ km}}$$

$$R_y = a_y + b_y + c_y = 87.5\text{ km} + 144\text{ km} + 0$$
$$= \boxed{232\text{ km}}$$

In unit-vector notation, $\boxed{\mathbf{R} = (-95.3\mathbf{i} + 232\mathbf{j})\text{ km.}}$ That is, the airplane can reach city C from the starting point by first traveling 95.3 km due west and then by traveling 232 km due north.

Exercise Find the magnitude and direction of **R**.

Answer 251 km, 22.3° west of north.